FSJES Ain Chock
FACULTÉ DES SCIENCES JURIDIQUES, ÉCONOMIQUES ET SOCIALES AIN CHOCK
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

جامعة الحسن الثاني بالدار البيضاء
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Département des Sciences Economiques et Gestion

Filière : Sciences Economiques et Gestion

Semestre 2

Module: Probabilités

Pr. AIT CHEIKH

Année universitaire 2019 - 2020

Chapitre 2:

Introduction aux calculs des probabilités

Plan du Chapitre

Expérience aléatoire

Une expérience est dite **aléatoire** si l’on **ne** peut prévoir son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner des résultats différents.

Exemple

- Jeter un dé
- Choisir une carte au hasard
- Jeu de pile ou face

Eventualité

Une éventualité est le résultat d’une **expérience aléatoire**.

Ensemble fondamental ou univers possibles (Ω)

Un univers est l’ensemble des résultats (éventualités) possibles d’une expérience aléatoire.

Un événement

Un événement aléatoire est un événement qui peut se réaliser ou ne peut pas se réaliser lors d’une expérience aléatoire.

Exemple:

L'expérience aléatoire : Jeter un dé

On jette un dé, **deux fois**, et on s'intéresse au nombre inscrit sur la face supérieure. On définit alors:

- **L'univers possibles (Ω):**
- **Les éventualités**: les nombres de la face supérieure du dé
- **Les événements**:

Événement A : obtenir le nombre 2

Événement B : obtenir le nombre 4

Événement C : obtenir un nombre impair

Événement certain : obtenir un nombre compris entre 1 et 6

Événement impossible: la somme des nombres obtenus est égale à 13

Événement contraire

L'événement contraire de A (noté $\bar{A}$) est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.

Exemple: A = {le nombre est pair} $\bar{A}$ = {le nombre est impair}

Rappel

On lance deux dés une seule fois, les résultats possibles sont :

- C'est un arrangement avec répétition donc:

$$A_6^2 = n^p = 6^2 = 36$$

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

- Soit l'évènement B = la somme des dés est égale à **4**

$$\boldsymbol{B = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}}$$

Concept et définition de probabilité

- ***Définition classique***: On définit la probabilité P d'un événement A de la façon suivante : si A peut ***se réaliser s*** fois ***sur un total*** de ***n*** épreuves ***équiprobables (avec des probabilités égales)***, alors

$$P = P(A) = \frac{Nombre\ de\ résultats\ favorables}{Nombre\ de\ résultats\ possibles} = \frac{s}{n}$$

- ***Définition mathématique***

Disjoints : $\boldsymbol{A \cap B = \Phi}$
Ou mutuellement exclusifs

1. $0 \leq P(A) \leq 1;$
2. $P(\Omega) = 1$ (***axiome de certitude***) et
3. $P(AUB) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles (***axiome d'additivité***)
4. $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ si A et B ne sont pas incompatibles
5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ et $P(ø) = 0$

Concept et définition de probabilité

Exemple :

En jetant un dé on peut obtenir un nombre pair de 3 façons, à partir de 6 cas «***équiprobables*** » c'est-à-dire :

$$P = P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Concept et définition de probabilité (il existe d'autres définitions)

- ***Définition empirique***: cette définition donne au concept de probabilité le sens de fréquence, sur la base des résultats d'une enquête ou un sondage.

Exemple :

Si le nombre des étudiants de S2 (Sciences économique et gestion) est **1500** et l'effectif total des étudiant de la FSJESC est **10 000**, alors : La probabilité qu'un étudiant pris au hasard soit en S2 est : $P = \frac{1\,500}{10\,000} = 0{,}15$

- ***Définition bayésienne :*** Elle est la ***moyenne*** des deux probabilités classique et empirique (fréquentiste).

Exemple:

On lance une pièce de monnaie **100 fois**, on obtienne **70** fois pile et **30** fois face.

Définition classique : ***0,5 ; 0,5*** **Définition empirique** : ***0,7 ; 0,3***

Définition ***bayésienne*** : $P(p) = \frac{0{,}7+0{,}5}{2} = 0{,}6$

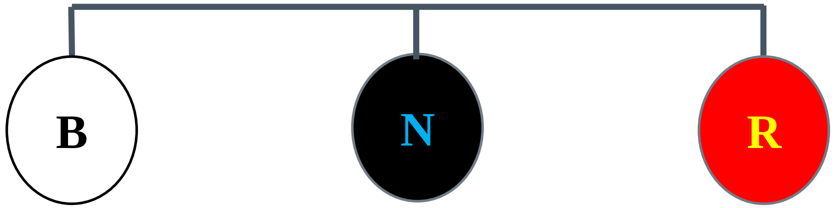
moyenne des deux probabilités

Concept et définition de probabilité

Exemple :

Dans une urne, il y a ***10*** boules ***banches, 20*** boules ***noires***, ***30*** boules ***rouges***, indiscernable et disposées au hasard. On tire une ***boule*** :

Représentation des possibilités



$$P\{Banche\} = \frac{10}{60};\quad P\{Noire\} = \frac{20}{60}\ ;\quad P\{Rouge\} = \frac{30}{60}$$

Remarque

La somme des probabilités de tous les événements possible est égale à 1

$$P\{Banche\} + P\{Noire\} + P\{Rouge\} = {}^{1}/_{6} + {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{2} = 1$$

Terminologie probabiliste

- **L'ensemble *Ω*** de tous les résultats possibles d'une expérience donnée est appelé ***ensemble fondamental***, ***sûr*** ou ***certain***
- Un sous-ensemble de Ω, *est appelé* ***évènement.***
- Un sous-ensemble de Ω formé d'un **seul élément** est appelé ***événement élémentaire***.
- L'ensemble vide ***Φ*** est appelé ***l'événement impossible.***

Événement

Certain: Ω

Simple (élémentaire): {Pile}

Composé: {2,4,6}

Impossible: ø

Terminologue probabiliste

On peut aussi combiner des événements pour former de nouveaux événements, à l'aide des différentes opérations sur les ensembles :

- $A \cup B$ est l'événement qui se produit si A ou B est réalisé.
- $A \cap B$ est l'événement qui se produit si A et B sont tous les deux réalisés.
- $\bar{A}$ le complémentaire de A, est l'événement qui se produit si A n'est pas réalisé.

Exemple :

On jette un dé et l'on observe le résultat obtenu. L'ensemble fondamental est composé de : $\Omega = \{1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6\}$

Considérons A, B, C les événements correspondant respectivement à l'apparition d'un nombre **pair**, d'un nombre **impair** et d'un nombre **premier** :

$$A = \{2, 4, 6\}, \qquad B = \{1, 3, 5\}, \qquad C = \{2, 3, 5\}$$

Alors :

- $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ est l'événement correspondant à l'apparition d'un nombre pair ou d'un nombre premier.
- $B \cap C = \{3, 5\}$ est l'événement correspondant à l'apparition d'un nombre premier impair.
- $\bar{C} = \{1, 4, 6\}$ est l'événement correspondant à l’apparition d'un nombre qui n'est pas premier.
- On remarque que **A et B s'excluent mutuellement** : $\boldsymbol{A \cap B = \Phi}$; en d'autres termes, il est impossible qu'un nombre pair et un nombre impair apparaissent simultanément.

Exemple :

On jette une pièce de monnaie ***trois fois***, et l'on observe la suite de piles (P) et de faces (F) obtenue. L'ensemble fondamental est formé de huit éléments: (c'est un arrangement avec répétition) :

$$\mathcal{A}_2^3 = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{FFF}, \boldsymbol{FFP}, \boldsymbol{FPP}, \boldsymbol{PFF}, \boldsymbol{PFP}, \boldsymbol{PPF}, \boldsymbol{PPF}, \boldsymbol{PPP}\}$$

Soit **A** l'événement correspondant à l'apparition consécutive de **deux faces ou plus**, et **B** l'événement correspondant à l'apparition consécutive de **trois faces ou trois piles**:

$$A = \{FFF, FFP, PFF\} \quad \text{et} \quad B = \{FFF, PPP\}$$

Alors

$A \cap B = \{FFF\}$ est l'événement élémentaire pour lequel on a seulement des faces.

L'événement qui correspondrait à l'apparition de 5 faces est **l'ensemble vide** $\boldsymbol{\phi}$.

Section 2 : Opérations sur les probabilités

Rappel

1. $0 \leq P(A) \leq 1$

2. $P(\Omega) = 1$ (*axiome de certitude*)

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ si A et B ne sont pas incompatibles

5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ et $P(\emptyset) = 0$

6. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Ensembles probabilisés finis

Définition

Soit Ω un ensemble fondamental **fini**, $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. On attribue à chaque point $a_i \in \Omega$ un nombre réel p_i, qu'on appelle ***probabilité*** de $\boldsymbol{a_i}$, on a les propriétés suivantes:

- Chaque p_i **est positif ou nul**, $p_i \geq 0$
- La **somme** des p_i est **égale à 1**, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

On dit que l'on a un ensemble probabilisé fini.

On définit alors la ***probabilité*** $\boldsymbol{P(A)}$ d'un événement quelconque A, comme étant La somme des probabilités des points de A. Pour des raisons de commodité, on écrit $P(a_i)$ au lieu de $P(\{a_i\})$.

Exemple

Ensembles probabilisés finis

On jette en l'air ***trois pièces*** de monnaie et on compte ***le nombre*** de faces obtenu. L'ensemble fondamental est $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$.

$$P(0) = \frac{1}{8}\ ;\ P(1) = \frac{3}{8};\ P(2) = \frac{3}{8};\ et\ P(3) = \frac{1}{8}.$$

La somme des probabilités est égale à 1.

- Soit A l'événement: « au moins une fois face », $A = \{1,2,3\}$
- et B l'événement: « soit 3 faces soit 3 piles » : $B = \{0, 3\}$

Alors:

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(B) = P(O) + P(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

Exemple

Ensembles probabilisés finis

Trois candidats A, B et C participent à un concours. A a deux fois plus de chances que B d'avoir le poste et B a deux fois plus de chances que C.

Q? Quelles sont les probabilités respectives $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, des 3 candidats?

- Soit $P(C) = p$; puisque B a deux fois plus de chances que C de gagner,
- $P(B) = 2p$. puisque A a deux fois plus de chances que B de gagner,
- $P(A) = 2P(B) = 2(2p) = 4p.$

On a **la somme des probabilités est égale à 1**. donc:

$$P(A) + P(B) + P(C) = p + 2p + 4p = 1 \text{ donc : } p = {}^{1}/_{7} = P(c)$$

Par conséquent $P(A) = 4p = {}^{4}/_{7}$ et $P(B) = 2p = {}^{2}/_{7}$

Q? Quelle est la probabilité $P(\{B, C\})$ pour que B ou C soient recrutés ?

Par définition:

$$\boldsymbol{P(\{B,C\}) = P(B) + P(C)} = {}^{2}/_{7} + {}^{1}/_{7} = {}^{3}/_{7}.$$

Ensembles finis équiprobable

Rappel

- ***Définition classique***: On définit la probabilité P d'un événement A de la façon suivante : si A peut ***se réaliser*** s fois ***sur un total*** de n épreuves ***équiprobables (avec des probabilités égales)***, alors:

$$P = P(A) = \frac{Nombre\ de\ résultats\ favorables}{Nombre\ de\ résultats\ possibles} = \frac{s}{n}$$

Remarque :

Soulignons que la formule précédente de P(A) ne peut être utilisée que pour un espace équiprobable.

Terminologie :

On utilise l'expression **"au hasard"** pour un espace équiprobable; la phrase "**choisir un point au hasard dans un ensemble S**" signifie que S est **un espace équiprobable**, ce qui veut dire que chaque point de S a la même probabilité.

Exemple:

Ensembles finis équiprobable

Lacer un **dé équilibré**, c'est-à-dire qu'on est dans une **situation d'équiprobabilité.**

Ensembles finis équiprobable

Exemple

On choisit au hasard 2 articles d'un lot de 12 articles dont 4 sont défectueux.

On a :

$$A = \{les\ deux\ articles\ sont\ défectueux\}$$
$$B = \{aucun\ des\ deux\ articles\ n'est\ défectueux\}$$
$$C = \{au\ moins\ un\ article\ soit\ défectueux\}$$

Q? Cherchons P(A), P(B) et P(C).

- L'espace équiprobable S peut se réaliser de $\binom{12}{2} = 66$ façons différentes, ce qui donne le nombre de cas possibles pour choisir 2 articles parmi les 12 disponibles.

Solution:

Ensembles finis équiprobable

Ω **peut se réaliser 66 façons différentes :**

$$C_{12}^{2} = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66 = card(\Omega)$$

A **peut se réaliser 6 façons différentes :**

$$C_{4}^{2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 = card(\mathrm{A})$$

B **peut se réaliser 28 façons différentes :**

$$C_{8}^{2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28 = card(\mathrm{B})$$

En appliquant la relation du calcul des probabilités:

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{6}{66} = 0,09$$

$$P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{28}{66} = 0,42$$

Solution:

Ensembles finis équiprobable

La probabilité pour **qu'au moins un** article soit défectueux (c'est-à-dire avoir **un** et **deux** articles défectueux, ou encore **c'est le complément de ne pas avoir aucun article défectueux**). Donc:

$$\boldsymbol{P(C) = 1 - P(B) = 1 - 0,42 = 0,58}$$

Ensembles finis équiprobable

Exercice

On tire au hasard une boule dans une urne contenant 4 boules identiques numéroté de 1 à 4. on définit les évènements suivants :

- A = le résultat est au plus égale à 2
- B = le résultat est un nombre pair
- C = le résultat est un nombre impair

1. Ecrire et représenter les résultats de l’expérience :

a. A, B, C, $A’$, $\bar{B}$,$C’$ et E l’ensemble fondamentale.

$A = \{1,2\}$ $B = \{2,4\}$ $C = \{1,3\}$ $\bar{A} = \{3,4\}$ $\bar{B} = \{1,3\}$ $\bar{C} = \{2,4\}$ $E = \{1,2,3,4\}$

Ensembles probabilisés infinis

Définition

On suppose maintenant que **Ω est un ensemble fondamental infiniment** dénombrable ; c'est-à-dire $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, \infty\}$. Comme dans le cas fini, on obtient un espace probabilisé en attribuant à chaque $a_i \in \Omega$ un nombre réel p_i.

$$\boldsymbol{p_i \geq 0}$$

$$\boldsymbol{p_1 + p_2 + .. = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1}$$

La probabilité $P(A)$ d'un événement quelconque A est alors la somme des probabilités de tous ses éléments.

Probabilités conditionnelles

Définition:

La probabilité conditionnelle de l'événement **A** sachant que **E** est réalisé ($\boldsymbol{P(E) \neq 0}$). C'est-à-dire, la probabilité de réalisation de l'événement A sachant que l'événement E est déjà réalisé, est défini comme suit:

$$\boldsymbol{P(A/E) = P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}}$$

Probabilités conditionnelles

Calcul de la réalisation de l'évènement A et B : $A \cap B$

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

Ce résultat peut être généralisé pour des événements quelconques, notés: $A_1, A_2, A_3, .., A_n$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) \times \cdots \times P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .. \cap A_{n-1})$$

Probabilités conditionnelles

Exemple:

Un lot contient 12 articles dont **4 sont défectueux**. On tire **au hasard trois articles** du lot, **l'un après l'autre**. ***Calculer la probabilité p pour que les trois articles ne soient pas défectueux.***

On définit les évènements A_1, A_2, A_3 respectivement le premier, le deuxième et le troisième n'est pas défectueux. Donc :

$$\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{55}}$$

Section 3 : Probabilité conditionnelle et totale

Probabilité totale

Définition

La formule des probabilités totales permet de calculer la probabilité d'un événement en le décomposant suivant un système exhaustif d'événements.

Supposons qu'un événement A peut se réaliser simultanément avec l'un des évènements $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, ,,, $\boldsymbol{H_n}$; avec $\boldsymbol{H_i}$ incompatible avec $\boldsymbol{H_j}$, $\forall$ $\boldsymbol{i, j}$.

La probabilité de réalisation de l'événement A est :

$$\boldsymbol{P(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap H_i)}$$

Si on remplace P$(\boldsymbol{A \cap H_i})$ par $\boldsymbol{P(A/H_i) \times P(H_i)}$**, on obtient la formule de probabilité totale:**

$$\boldsymbol{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i) \times P(H_i)}$$

Probabilité totale

Exemple

On a trois boites différentes :
Boîte I : contient **10 ampoules** dont **4 sont défectueuses**.
Boîte II : contient **6 ampoules** dont **1 est défectueuse**.
Boîte III : contient **8 ampoules** dont **3 sont défectueuses**.

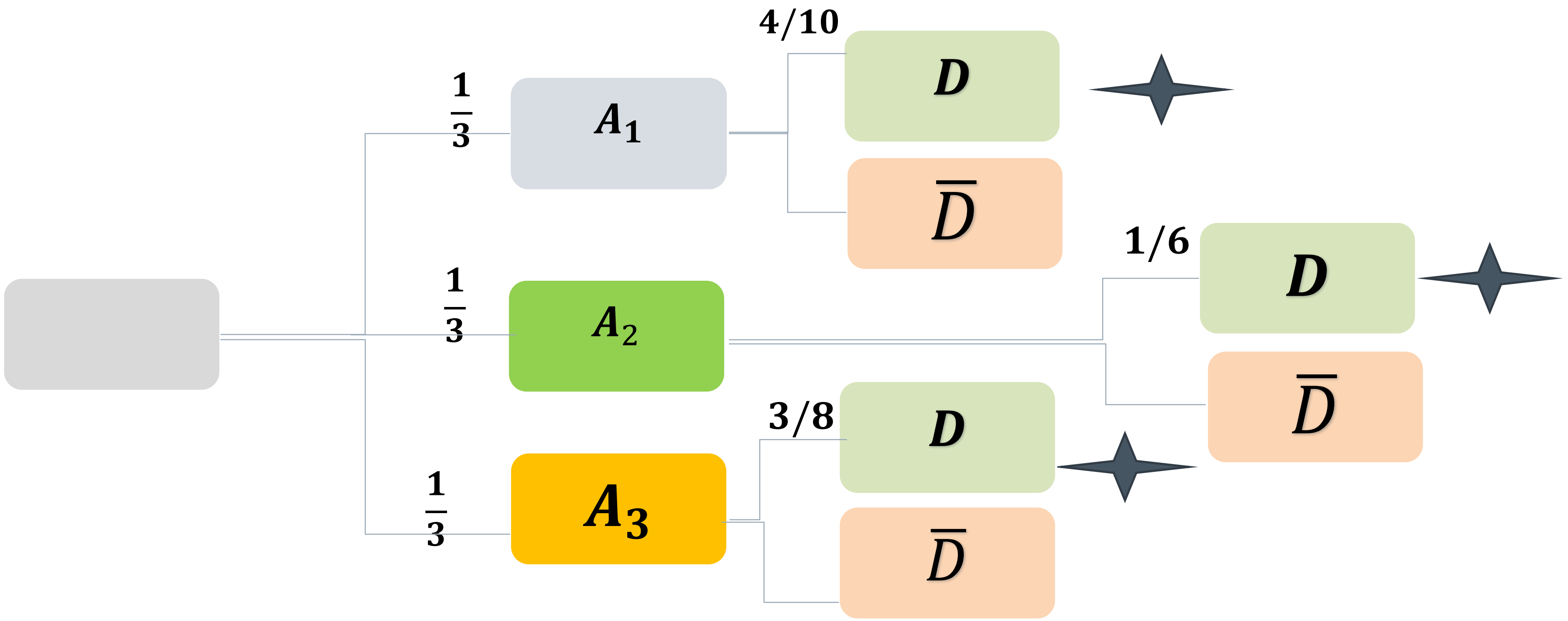
On choisit une boîte au hasard et l'on en tire une ampoule au hasard.

Quelle est la probabilité pour que l'ampoule soit défectueuse ?

Probabilité totale

Solution: On représente l'expérience comme suit :

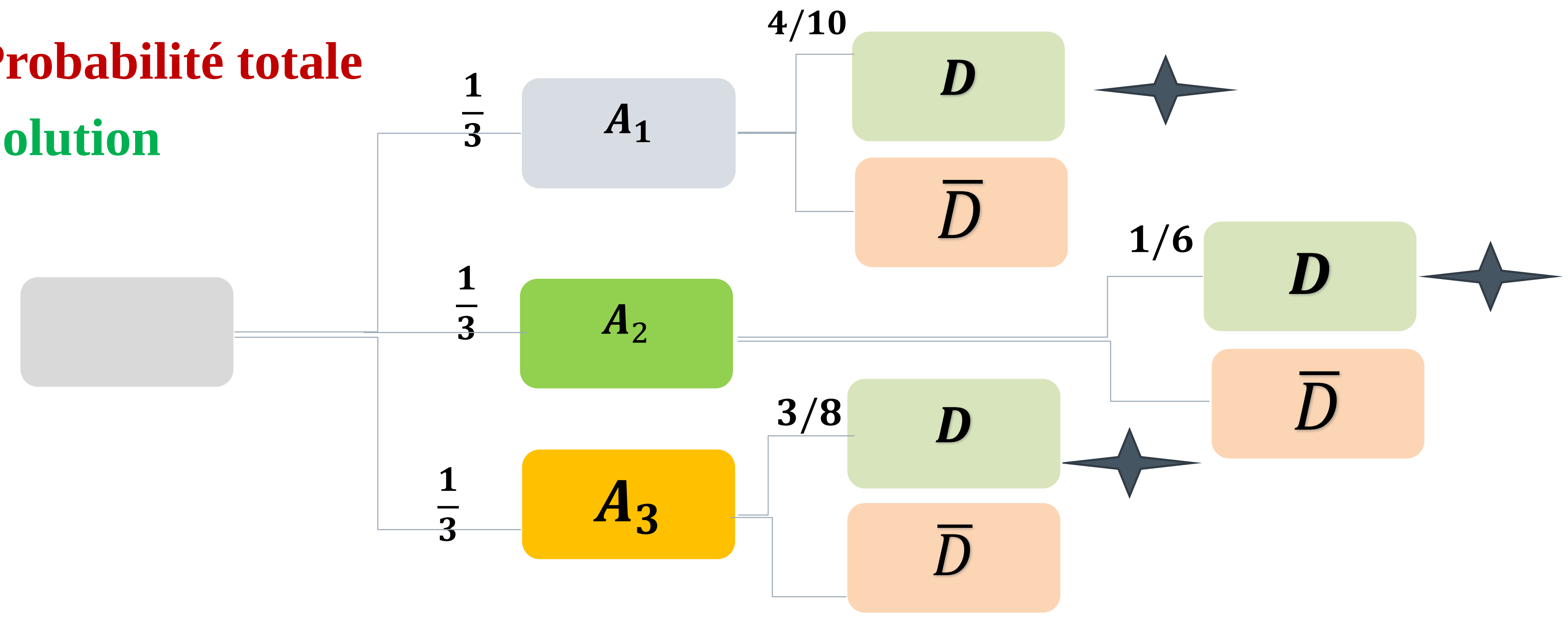
- Tirer l'une des trois boîtes $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3}$
- Tirer une ampoule qui est défectueuse $(\boldsymbol{D})$, ou en bon état $(\boldsymbol{\bar{D}})$



Section 3 : Probabilité conditionnelle et totale

Probabilité totale

Solution



$$p = \frac{1}{3} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{113}{360}$$

Section 4 : Théorème de Bayes

On suppose qu'un événement A peut se réaliser simultanément avec l'un des événement $H_1, H_2, ,,, H_n$. Les événements H_i sont supposés incompatibles entre eux. On suppose aussi que $P(H_i)$ et $P(A/H_i)$ sont connues.

Le théorème de Bayes nous permet de calculer les probabilités $P(H_i/A)$.

On a: (1): $\mathrm{P}(A \cap H_i) = P(H_i/A) \times P(A)$

(2): $\mathrm{P}(A \cap H_i) = P(A/H_i) \times P(H_i)$

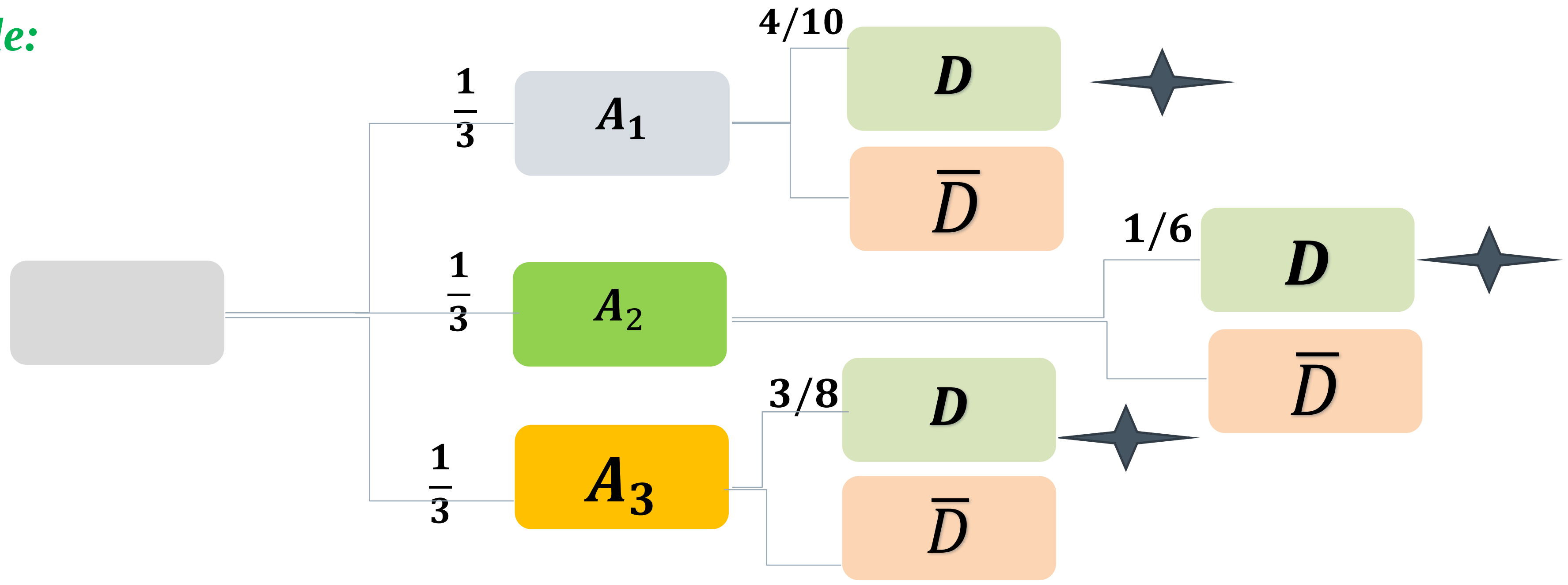
$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i) \times P(H_i)}{P(A)}$$

Donc:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i) \times P(H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i) \times P(H_i)}$$

Section 4 : Théorème de Bayes

Exemple:



On choisit une boîte au hasard et on tire une ampoule au hasard. Quelle est la probabilité qu'une ampoule défectueuse soit de la boite II ? C'est-à-dire $P(A_2/D) = P_D(A_2)$?

$$P(D) = \frac{113}{360};\ P_{A_2}(D) = \frac{1}{6} \text{ et } P(A_2) = \frac{1}{3}$$

$$P_D(A_2) = \frac{P(D/A_2) \times P(A_2)}{P(D)} = \frac{{}^{1}\!/_{6} \times {}^{1}\!/_{3}}{{}^{113}\!/_{360}} = 0,1769$$

Section 4 : Théorème de Bayes

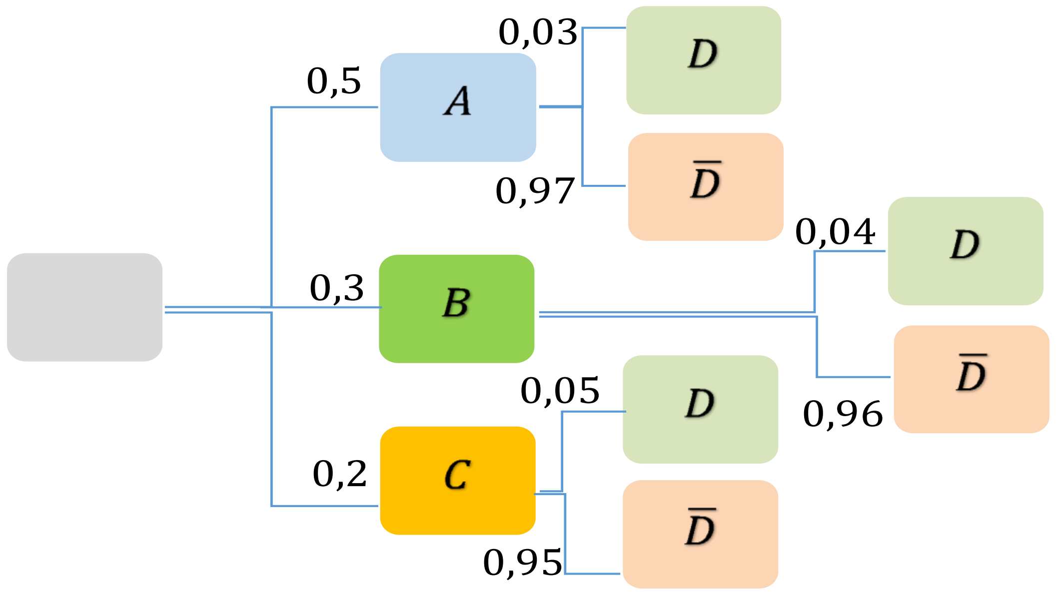
Exemple:

Trois machines ***A*, *B* et *C*** produisent respectivement **50 %, 30 % et 20 %** du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Les pourcentages **de pièces défectueuses** de ces machines sont de **3%, 4 % et 5 %.** Si l'on prend une pièce au hasard, ***quelle est la probabilité pour que cette pièce soit défectueuse ?*** Supposons que l'on prenne **une pièce au hasard** et que celle-ci soit **défectueuse**.

Calculer la probabilité pour que cette pièce a été produite par la machine A ?

Section 4 : Théorème de Bayes

Solution:



$\boldsymbol{P(D) = (0,05 \times 0,03) + (0,3 \times 0,04) + (0,2 \times 0,05) = 0,037}$, **on a utilisé la probabilité totale**

La probabilité pour que cette pièce a été produite par la machine A (Théorème de Bayes) est :

$$P_D(A) = \frac{0,03 \times 0,5}{0,037} = 0,4054$$

Section 5 : Indépendance

Définition

Soient A et E deux évènements non nulle. On dit qu'un événement E est ***indépendant*** d'un événement A si la probabilité pour que E se réalise n'est pas influencée par le fait que A se soit ou ne se soit pas réalisé. En d'autres termes, E est indépendant de A si la probabilité de E est égale à la probabilité conditionnelle de E, sachant que A s'est produit : $P(E) = P_A(E)$

$$\boldsymbol{P(A \cap E) = P(A) \times P(E)}$$

On dit que les événements A et E ***sont indépendants*** si :

$\boldsymbol{P(A \cap E) = P(A) \times P(E)}$; dans le cas contraire, on dit **qu'ils sont dépendants.**

Section 5 : Indépendance

Exemple:

On jette **3 fois** une **pièce de monnaie** **<u>bien équilibrée</u>**, ce qui donne l'ensemble équiprobable: $\boldsymbol{\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}}$.

Le nombre de résultat possible est : $2^3 = 8$

On considère les événements :

$\boldsymbol{A = \{le\ premier\ jet\ donne\ face\}}$

$\boldsymbol{B = \{le\ second\ jet\ donne\ face\}}$

$\boldsymbol{C = \{deux\ jets\ cons\acute{e}cutifs\ donnent\ face\}}$

$\mathbf{A} = \boldsymbol{\{FFF, FFP, FPF, FPP\}}$

$\mathbf{B} = \boldsymbol{\{FFF, FFP, PFF, PFP\}}$

$\mathbf{C} = \boldsymbol{\{FFP, PFF\}}$

<u>Q ?</u> Vérifier si les évènements A, B et C sont des évènements indépendants ?

Section 5 : Indépendance

Solution:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{8} \qquad P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \qquad P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

A et B sont indépendants

A et C sont indépendants

B et C sont dépendants

Section 5 : Indépendance

Exemple:

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard et on considère les évènements :

$\mathbf{A} = \{\text{tirage d'un nombre pair}\}$ $\mathbf{B} = \{\text{tirage d'un multiple de } 3\}$

L'ensemble fondamental équiprobable est : $\boldsymbol{\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}}$

$$\mathbf{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \qquad \mathbf{B} = \{3, 6, 9, 12\}$$

Q ? ***Vérifier si les événements A et B sont des événements indépendants ?***

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \qquad P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Donc *A* et *B* sont *indépendants*

Synthèse

Probabilité $P : \mathcal{E}(\Omega) \to [0,1]$ $(P_1)\ \forall A \in \mathcal{E}(\Omega)$ $P(A) \geq 0$

$A \to P(A)$ $(P_2) P(\Omega) = 1$

$(P_3)\ \forall A, B \in \mathcal{E}(\Omega)$

$$A \cap B = \emptyset \leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$A \cap B \neq \emptyset \leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilités combinatoires :

$$P(A) = \frac{s}{n} = \frac{cas\ favorables}{cas\ possibles}$$

Additivité des probabilités : (partitions de l'ensemble fondamental)

$A_i \cap A_j = \emptyset$ **avec i ≠ j alors** $P(\bigcup_i A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Probabilités conditionnelles :

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilités composées : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)$

Probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B/A_j)\, P(A_j)$$

Formule de Bayes :

$$P_B(A_j) = P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j) \times P(A_j)}{P(B)}$$

Indépendance A **et** B **indépendants si**

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$P(A/B) = P(A)$$
$$P(A/B) = P(A/\bar{B})$$

Exercices

Q2.1. Calculer la probabilité p de chacun des événements suivants :

(i) Un nombre pair apparaît quand on jette un dé bien équilibré.

(ii) Pile apparaît au moins une fois quand on jette trois pièces de monnaie bien équilibrées.

(iii) On obtient une bille blanche en tirant une seule bille dans une urne contenant 4 billes blanches, 3 billes rouges et 2 billes bleues.

Exercices

Q2.2. On prend au hasard trois ampoules électriques d'un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité p pour que **(i)** aucune ampoule ne soit défectueuse, **(ii)** exactement une ampoule soit défectueuse, **(iii)** au moins une ampoule soit défectueuse.

Exercices

Q2.3. On choisit deux cartes au hasard parmi 10 cartes numérotées de 1 à 10. Calculer la probabilité p pour que la somme des deux cartes tirées soit impaire, sachant que **(i)** on tire les deux cartes ensemble, **(ii)** on fait un tirage exhaustif des deux cartes l'une après l'autre, **(iii)** on fait un tirage non exhaustif des deux cartes l'une après l'autre.

Exercices

Q3.1. On jette une paire de dés bien équilibrés. Calculer la probabilité p pour que la somme obtenue soit supérieure ou égale à 10, **sachant que (i)** le premier dé a donné 5, **(ii)** au moins l'un des dés a donné 5.

Exercices

Q3.2. On jette trois pièces de monnaie bien équilibrées. Calculer la probabilité p pour que toutes les trois donnent face, **sachant que (i)** la première pièce donne face à priori, **(ii)** l'une des pièces donne face à priori.

Exercices

Q4.1. Trois machines A, B et C produisent respectivement 60 %, 30 % et 10 % du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Les pourcentages de résultats défectueux de ces machines sont respectivement 2 %, 3 % et 4 %. On choisit une pièce au hasard et on s'aperçoit qu'elle est défectueuse. Calculer la probabilité pour que cette pièce ait été produite par la machine C.

Exercices

Q3.3. On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calculer : $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(A \cup B)$, $P(CA/CB)$, $P(CB/CA)$

Exercices

Q3.4. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ et $P(AUB) = 3/4$. Calculer $P(A/B)$ et $P(B/A)$